Problema sobre modelos no lineales 2.

Obtener el sistema de ecuaciones del algoritmo Newton-Raphson para el modelo

$$y_t = e^{\beta x_t} + u_t\,.$$

Para los datos:

y_t	x_t
1	0
3	1
7	2

obtener $\hat{\beta}_2$ partiendo de $\hat{\beta}_0 = 0$

Solución

Con este algoritmo lo que pretendemos es minimizar la expresión de la suma de los cuadrados de los residuos aproximando mediante un desarrollo en serie de Taylor de 2º orden. Sea

$$SCR(\beta) \cong SCR(\hat{\beta}_0) + \left(\frac{\partial SCR(\beta)}{\partial \beta}\right)_{\hat{\beta}_0} (\beta - \hat{\beta}_0) + \frac{1}{2}(\beta - \hat{\beta}_0)'\left(\frac{\partial^2 SCR(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'}\right)_{\hat{\beta}_0} (\beta - \hat{\beta}_0)$$

al minimizar

$$\left(\frac{\partial SCR(\beta)}{\partial \beta}\right)_{\hat{\beta}_0} = 0$$

de donde

$$\frac{\partial SCR(\beta)}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial^2 SCR(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'}\right)_{\hat{\beta}_0} (\beta - \hat{\beta}_0)$$

y así

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_0 - \left(\frac{\partial^2 SCR(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'}\right)_{\hat{\beta}_0}^{-1} \left(\frac{\partial SCR(\beta)}{\partial \beta}\right)_{\hat{\beta}_0}$$

iterando en el proceso podemos calcular $\hat{\beta}_2$

En este modelo la función a minimizar será

$$\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - f(x_t, \hat{\beta})\right)^2 = \sum_{t=1}^{n}\left(y_t - e^{\hat{\beta} x_t}\right)^2$$

y por tanto la primera derivada será

$$\partial / \partial \hat{\beta} \Rightarrow -2\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - e^{\hat{\beta}x_t}\right)e^{\hat{\beta}x_t}x_t$$

de forma similar tendremos la segunda derivada

$$\partial^2 / \partial \hat{\beta}^2 \Rightarrow -2\sum_{t=1}^{n}\left(y_t x_t^2 e^{\hat{\beta}x_t} - 2x_t^2 e^{2\hat{\beta}x_t}\right)$$

Aplicando el algoritmo obtenemos

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_0 - \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t e^{\hat{\beta}x_t}\left(y_t - e^{\hat{\beta}x_t}\right)}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2 e^{\hat{\beta}x_t}\left(y_t - 2e^{\hat{\beta}x_t}\right)}$$

De donde para $\hat{\beta}_0 = 0$

$$\hat{\beta}_1 = -\frac{\sum_{t=1}^{n} x_t\left(y_t - 1\right)}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2\left(y_t - 2\right)}$$

obteniendo a partir de los datos iniciales que

$$\hat{\beta}_1 = -\frac{14}{17} \simeq -0.8$$

El valor estimado solicitado lo obtenemos mediante la iteración en la expresión anterior, es decir,

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t e^{\hat{\beta}_1 x_t}\left(y_t - e^{\hat{\beta}_1 x_t}\right)}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2 e^{\hat{\beta}_1 x_t}\left(y_t - 2e^{\hat{\beta}_1 x_t}\right)}$$

y por tanto

$$\hat{\beta}_2 \simeq -1.4$$